

Correction de l'exercice 6 du TD n°2

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Justifier que f est \mathcal{C}^1 sur son ensemble de définition et calculer Df . En déduire les valeurs de f .

La fonction f est composée de fonctions $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur leurs ensembles de définition. Le seul problème vient du dénominateur de $\frac{x+y}{1-xy}$, qui s'annule si et seulement si $1 = xy$. Ainsi la fonction f est bien définie et même \mathcal{C}^∞ sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$.

Commençons par calculer les dérivées partielles de f . Pour tout point $(x, y) \in \mathcal{D}$,

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2} + 0 - \frac{h'_y(x)}{1+h_y(x)^2},$$

où

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad h_y(x) := \frac{x+y}{1-xy}.$$

Dans la définition de la fonction h_y , le réel y est le paramètre et x la variable. On a

$$h'_y(x) = \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}.$$

On en déduit donc,

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}}{1 + \frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1+x^2(1+y^2)+y^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque la fonction f est « symétrique » par rapport à ses coordonnées, $f(x, y) = f(y, x)$, on en déduit que $\partial_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$. Ainsi on en déduit immédiatement que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$d_{(x,y)}f(h, k) = \partial_1 f(x, y)h + \partial_2 f(x, y)k = 0.$$

Pour en déduire les valeurs de f on utilise l'inégalité des accroissements finis. Fixons $a = (x_a, y_a) \in \mathcal{D}$ et $b = (x_b, y_b) \in \mathcal{D}$, on note, pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) = (1-t)a + tb = ((1-t)x_a + tx_b, (1-t)y_a + ty_b)$. Alors,

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|d_{\gamma(t)}f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})} \|b - a\| = 0.$$

On en déduit ainsi directement que $f(b) = f(a)$ et ce pour tout point de \mathcal{D} et donc la fonction est constante. **Mais cette formule contient une faute!!!** Il faut que le domaine d'application soit connexe. Ce qui n'est pas du tout le cas de \mathcal{D} (faire un dessin). On découpe donc \mathcal{D} de la façon suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy > 1, x > 0, y > 0\} \\ \mathcal{D}_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\} \\ \mathcal{D}_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy > 1, x < 0, y < 0\}.\end{aligned}$$

De cette façon, on obtient bien (puisque chaque \mathcal{D}_i est connexe) que la fonction f est constante sur \mathcal{D}_i . Puis, comme on a

$$\begin{aligned}f(x, x) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi \\ f(0, 0) &= 0 \\ f(x, x) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = -\pi,\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in \mathcal{D}_1, & \quad f(x, y) = \pi \\ \forall (x, y) \in \mathcal{D}_2, & \quad f(x, y) = 0 \\ \forall (x, y) \in \mathcal{D}_3, & \quad f(x, y) = -\pi.\end{aligned}$$